

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 260

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 261

A4. **α.** Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Η εξίσωση γίνεται : $2x^2 - |w - 4 - 3i| \cdot x + 2|z| = 0$

$$\bullet \text{ Πρέπει } \Delta = 0 \Leftrightarrow (-|w - 4 - 3i|)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2|z| = 0 \Leftrightarrow$$

$$|w - 4 - 3i|^2 = 16|z| \Leftrightarrow |z| = \frac{|w - 4 - 3i|^2}{16} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ 1^{ος} τρόπος} \text{ Το } 1 \text{ είναι διπλή ρίζα άρα } \frac{-\beta}{2a} = \frac{|w - 4 - 3i|}{4} = 1$$

$$\bullet \text{ 2^{ος} τρόπος} \text{ Το } 1 \text{ είναι ρίζα της εξίσωσης άρα}$$

$$2 - |w - 4 - 3i| + 2|z| = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2 - |w - 4 - 3i| + 2 \frac{|w - 4 - 3i|^2}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 8|w - 4 - 3i| + |w - 4 - 3i|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(|w - 4 - 3i| - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i| - 4 = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i| = 4 \quad (2)$$

Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του w είναι

ο κύκλος C₂ με κέντρο K(4, 3) και ακτίνα ρ₂ = 4

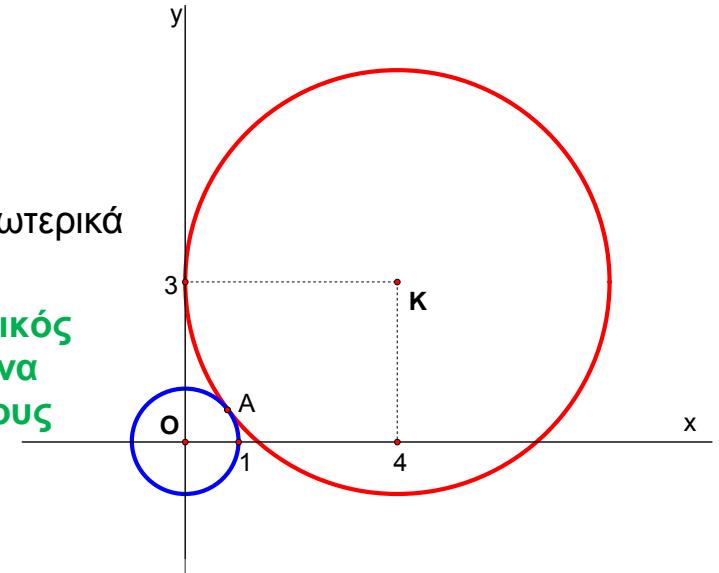
$$\bullet \text{ (1)} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} |z| = \frac{4^2}{16} \Leftrightarrow |z| = 1$$

Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

ο κύκλος C₁ με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα ρ₁ = 1

$$\mathbf{B2.} (OK) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} \\ = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Είναι $(OK) = \rho_1 + \rho_2$,
άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά
σε ένα σημείο A (σχήμα)
Επομένως **υπάρχει μοναδικός
μιγαδικός αριθμός, η εικόνα
του οποίου ανήκει και στους
δύο παραπάνω
γεωμετρικούς τόπους.**



$$\mathbf{B3.} |w|_{\max} = (OB) = (OK) + \rho_2 = 5 + 4 = 9$$

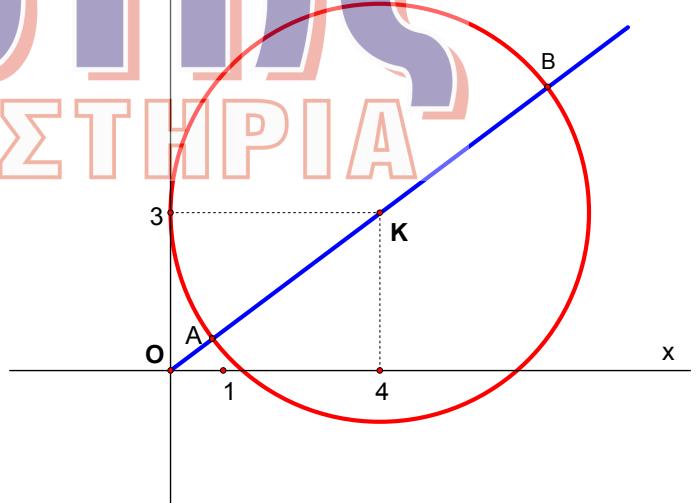
$$|z - w| \leq |z| + |-w| \Leftrightarrow$$

$$|z + w| \leq 1 + |w| \Leftrightarrow$$

$$|z - w| \leq 1 + |w|_{\max} \Leftrightarrow$$

$$|z - w| \leq 1 + 9 \Leftrightarrow$$

$$|z - w| \leq 10$$



$$|z + w| \leq |z| + |w| \Leftrightarrow$$

$$|z + w| \leq 1 + |w| \Leftrightarrow$$

$$|z + w| \leq 1 + |w|_{\max} \Leftrightarrow$$

$$|z + w| \leq 1 + 9 \Leftrightarrow$$

$$|z + w| \leq 10$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι : $2xf(x) + x^2[f'(x) - 3] = -f'(x) \Leftrightarrow$

$$(x^2)' f(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow [x^2 f(x) - x^3 + f(x)]' = 0$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. είναι $x^2 f(x) - x^3 + f(x) = c$

Για $x = 1$ έχω : $f(1) - 1 + f(1) = c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$x^2 f(x) - x^3 + f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 f(x) + f(x) = x^3 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} \right)' = \frac{3x^2 \cdot (x^2 + 1) - (x^3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$$

και το " $=$ " ισχύει μόνο για $x = 0$

άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Γ2. Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = 0 = \beta$$

άρα f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = 0 = \beta$$

άρα f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$

$$\Gamma 3. f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2) \Leftrightarrow$$

$$5(x^2 + 1)^3 - 8 \leq 8(x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$5(x^2 + 1)^3 \leq 8(x^2 + 1)^2 + 8 \Leftrightarrow$$

$$5(x^2 + 1)^3 \leq 8[(x^2 + 1)^2 + 1] \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2 + 1)^3}{(x^2 + 1)^2 + 1} \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 + 1) \leq f(2) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 1 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned}\Gamma 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f'(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^4 + 3x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{3x^2}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} + \frac{2x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2}}{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}} = \sqrt{\frac{1 + 0}{1 + 0 + 0}} = 1\end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{f'(x)} - \kappa) = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f'(x)} - \kappa = 5 \Leftrightarrow$$

$$1 - \kappa = 5 \Leftrightarrow \kappa = -4$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \sqrt{x^2 + 1} \cdot f'(x) + \frac{x \cdot f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + 1} \cdot f'(x) + \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' \cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} \right)' = (x)' \quad \xrightarrow{\text{συνέπειες ΘΜΤ}}$$

$$f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = x + c$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = c = 0$$

$$\text{Άρα } f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$$

ΧΙΟΥΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

$$\Delta 2. f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} > 0$$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.**

$$\Delta 3. f(x^4 + 1) = f(3x^3 + 2x^2 + 3x) \Leftrightarrow_{f \uparrow \\ f "1-1"}^{f "1-1"}$$

$$x^4 + 1 = 3x^3 + 2x^2 + 3x \Leftrightarrow$$

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Θεωρούμε συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

- η φ είναι συνεχής στα $[0, 1]$ και $[1, 4]$ ως πολυωνυμική
- $\varphi(0) = 1 > 0$, $\varphi(1) = -6 < 0$ και $\varphi(4) = 21 > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχουν :

ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0$

ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1, 4)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_2) = 0$

$$\Delta 4. \varphi'(x) = (x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1)' = 4x^3 - 9x^2 - 4x - 3$$

- η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$

- $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ από Δ3
από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 4)$,

τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi) = 0$,

$$\text{άρα } 4\xi^3 - 9\xi^2 - 4\xi - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\xi^3 - 9\xi^2 = 4\xi + 3$$

Επομένως **η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 = 4x + 3$**

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 4)$.